MA1 – několik řešených příkladů výpočtu neurčitých integrálů

(z Repetitoria MA1 v pondělí 14.12.)

① $\displaystyle\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx$:

(i) integrál existuje na intervalu $(-\infty, 1)$, neboť funkce $y = x^2$ je definovaná a spojitá v R, a fce $y = \ln(1-x^3)$ je definovaná a spojitá pro $x \in (-\infty, 1)$ $(1-x^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 < 1)$

(ii) výpočet – užijeme 1. větu o substituci, neboť při pohledu "na zadaný integrál „vidíme"", že integrál je „typu" $\displaystyle\int \ln(g(x))\cdot g'(x)\,dx$, kde $g(x) = 1-x^3$, $g'(x) = -3x^2$ (jen v integrálu „chybí" konstanta (-3));

tedy lze „počítat":

$$\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2 \ln(1-x^3)\,dx = \left|\begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ -3x^2dx = dt \end{array}\right|$$

$$\underset{1VS}{=} -\frac{1}{3}\int \ln t\,dt = \left|\begin{array}{ll} u' = 1, & u = t \\ v = \ln t, & v' = \frac{1}{t} \end{array}\right| \underset{PP}{=}$$

pokračujeme integrací per partes

$$= -\frac{1}{3}\left(t\ln t - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt\right) = -\frac{1}{3}\left(t\ln t - t\right) + C = \text{(např.)}$$

$$= \frac{1}{3}t\,(1-\ln t) + C = \underline{\frac{1}{3}(1-x^3)\left(1-\ln(1-x^3)\right) + C},$$

„návrat" ke proměnné „x"

$t = 1-x^3$

$\underline{x \in (-\infty, 1).}$

Možná, že někoho „napadlo" počítat daný integrál „od začátku" integrací „per partes" – zkusme též:

$$\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x^2, & u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln(1-x^3), & v' = \frac{1}{1-x^3}(-3x^2) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln(1-x^3) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{(-3x^2)}{1-x^3}\,dx = \frac{x^3}{3} \ln(1-x^3) - \int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$$

„vydělíme"

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1-x^3) - \left(\int x^2\,dx + \int \frac{x^2}{x^3-1}\,dx \right) =$$ (1VS u třetího integrálu)

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1-x^3) - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln(1-x^3) - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \ln(|x^3-1|) + c =$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \ln(1-x^3) \cdot (x^3-1) - \frac{x^3}{3} + c}$$

a „dřívější" výsledek (po úpravě)

$$\int x^2 \ln(1-x^3)\,dx = \underline{\frac{1}{3}(x^3-1) \cdot \ln(1-x^3) - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} + c} \;;$$

a vidíme, že primitivní funkce k funkci $f(x) = x^2 \ln(1-x^3)$ se liší v intervalu $(-\infty, 1)$ jen o konstantu – tj. o $\tilde{c} = \frac{1}{3}$!

A tedy to „vyšlo"! Ale začít „substitucí" je jistě „jednodušší".

② $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$:

(i) integrál existuje na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, neboť zde je daná funkce $f(x) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ spojitá;

(ii) výpočet integrálu:

opět asi budeme uvažovat, zda je zde „výhodnější", či lepší" užití „substituce" (a tedy bude „hledat", co by se dalo „substituovat", nebo zda by integrál bylo možné počítat integrací „per partes" – zde asi přijdeme na „to", že při derivaci „zůstává" stále $e^{\frac{1}{x}}$, tedy zkusíme substituci:

pokud bychom zvolili $\frac{1}{x} = t$, $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ – a to v integrálu „najdeme", tedy „víme", co chceme najít:

$$\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx \overset{(*)}{=} -\int \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2} dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int t e^t dt = \left| \begin{array}{ll} u' = e^t, & u = e^t \\ v = t, & v' = 1 \end{array} \right| = -\left(t e^t - \int e^t dt\right) =$$

a nyní už se „hodí" integrace per partes

$$= -\left(t e^t - e^t\right) + c = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + c, \quad x \in (-\infty, 0) \vee x \in (0, +\infty).$$

Poznámka: Kdybychom se „začli" integrací per partes, asi by:

$$(*) \quad \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{x^3}, & u = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \\ v = e^{\frac{1}{x}}, & v' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} dx \; -$$

integrace se „zhoršuje" –
– není vhodný „postup"

③ $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ (příklad „navíc", nebylo na Repetitoriu)

(i) integrál existuje na intervalu $\langle 0,+\infty)$ ($e^{\sqrt{x}}$ je zde spojitá fce)

(ii) výpočet: „zkusíme" substituci $\sqrt{x}=t$ (dle 2VS):

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| \underset{2VS}{=} 2\int t e^t\,dt \underset{\substack{\text{per partes}\\ \text{(příklad 2)}}}{=} 2\,(te^t-e^t)+C =$$

$$= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

Pokud bychom výpočet „zahájili" integrací per partes:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u'=1, & u=x \\ v=e^{\sqrt{x}}, & v'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right| = xe^{\sqrt{x}} - \int x e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\overset{(**)}{=} x\cdot e^{\sqrt{x}} - \left(xe^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}}\right) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

(„podruhé", ale opět, trochu složitější)

integrál $\int x e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ opět se „zdá" dost složitý, ale „nosná" by zde šla 1. substituce – k $t=\sqrt{x}$ zde máme „$dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}$":

tj. $$\int x e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \underset{1VS}{=} \left|\begin{array}{l} \sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \end{array}\right| = \int t^2 e^t\,dt \underset{\substack{pp\\ \text{opět}}}{=} \left|\begin{array}{ll} u'=e^t, & u=e^t \\ v=t^2, & v'=2t\,dt \end{array}\right|$$

$$= t^2e^t - 2\int te^t\,dt \underset{pp\,-\,\text{umíme}}{=} t^2e^t - 2\left(te^t-e^t\right)+C \underset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$= xe^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}}$$ a vracíme se k (**):

4 $\int \arcsin^2 x \, dx$

(i) integrál existuje na intervalu $(-1,1)$, kde je $\arcsin x$ funkce spojitá (fce $\arcsin x$ je definovaná a spojitá na intervalu uzavřeném $\langle -1,1\rangle$, ale dohodli jsme se, že primitivní funkce budeme definovat (a počítat) na intervalech otevřených);

(ii) výpočet:

a) začneme substitucí druhou: $\arcsin x = t$

$$\int \arcsin^2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t, \quad x \in (-1,1) \\ x = \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \right| \underset{2VS}{=}$$

$$= \int t^2 \cos t \, dt \underset{(2 \times \text{per partes})}{=} \left| \begin{array}{l} u' = \cos t, \ u = \sin t \\ v = t^2, \ v' = 2t \end{array} \right| = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t \, dt =$$

$$\underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = \sin t, \ u = -\cos t \\ v = t, \ v' = 1 \end{array} \right| = t^2 \sin t - 2\left(-t\cos t + \int \cos t \, dt\right) \underset{T}{=}$$

$$= t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C \underset{t = \arcsin x}{=}$$

$$= \underline{x \arcsin^2 x - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + C, \quad x \in (-1,1)},$$

neboť

(i) $\sin(\arcsin x) = x$ (fce inverzní)

(ii) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$,

neboť, když „obecně" je $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\cos x > 0$!

b) <u>zkusíme obrácený „postup" – začneme integrací per partes :</u>
(také se zde objeví „užitečné" věci)

$$\int \arcsin^2 x \, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 \ , \ u = x \\ v = \arcsin^2 x , \ v' = 2 \arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= x \arcsin^2 x - 2\int x \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= x \arcsin^2 x + \int \arcsin x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

$$= \underline{x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C} ,$$

<u>? jak dále</u>
uspořádejme si integrál, hledáme, co se dá dále integrovat v per partes a dostaneme integrál (v (*))! „zřejmé" na 1VS

což je stejný výsledek jako v a), ale asi opět zde, v b), je integrování trochu složitější;

$$(*) \quad \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{vmatrix} 1 - x^2 = t \\ -2x \, dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt \underset{T}{=} 2\sqrt{t} + C =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2} + C$$

a pak už $\displaystyle \int \arcsin x \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \underset{PP}{=} \begin{vmatrix} u' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} , & u = 2\sqrt{1-x^2} \\ v = \arcsin x , & v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{vmatrix} =$

$$= 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C$$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{x\,(x-2\sqrt{x}+3)}\,dx$ – máme zde integrál z racionální funkce v $\sqrt{x}$, x tj. $\int R(x,\sqrt{x})\,dx$, a zde je „doporučená" substituce (2VS): $\sqrt{x}=t$, tedy

(i). $x \in (0,+\infty)$ (po substituci „vidíme")

(ii) výpočet:

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+3)}\,dx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2t\,dt\end{array}\right| \underset{2VS}{=}$$

$$= \int \frac{t-1}{t^{\cancel{2}}(t^2-2t+3)}\cdot 2\cancel{t}\,dt \underset{\text{„rozklad"}}{=} \int \frac{A}{t}\,dt + \int \frac{Bt+C}{t^2-2t+3}\,dt =$$

(neboť polynom t^2-2t+3 nemá reálné kořeny)

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{2t+2}{t^2-2t+3}\,dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\ln t + \frac{1}{3}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt =$$ → potřebujeme zde $\underline{\underline{1}}$

(t>0)

$$= -\frac{2}{3}\ln t + \frac{1}{3}\ln(t^2-2t+3) + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt \overset{*}{=}$$ pokračování na str. 8 (omlouvám se)

Výpočet A,B,C: $\dfrac{2(t-1)}{t(t^2-2t+3)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{Bt+C}{t^2-2t+3}$, $t \neq 0$,

tedy $2(t-1) = A(t^2-2t+3) + Bt^2 + Ct$

a srovnání koeficientů polynomů (vede k soustavě rovnic pro A,B,C):

u t^2: $A+B = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$

u t: $-2A + C = 2 \Rightarrow C = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

u t^0: $3A = -2 \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$

$$\overset{*}{=} -\frac{2}{3}\ln t + \frac{1}{3}\ln(t^2-2t+3) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C$$

(skoro „tabulka")

$$= -\frac{2}{3}\ln t + \frac{1}{3}\ln(t^2-2t+3) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C \underset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$= -\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\ln(x-2\sqrt{x}+3) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Poznámky k některým „krokům" v řešení:

(i) integrál $\int \frac{2t+2}{t^2-2t+3}\,dt$ „rozdělíme" na dva integrály, které „umíme":

$$1\int \frac{2t-2}{t^2-2t+3}\,dt \quad + \quad ?\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt$$

vede k „arctg" (na T)

$= \ln(t^2-2t+3)$

$\left(\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|g(t)| + C, \right.$ kde $\left. g(t)>0 \right)$

(ii) ? „doladíme tak, aby v součtu bylo v čitateli „$2t+2$", tj. $? = 4$

(iii) pokud máme $\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt$, kde je „2" místo „1" pro arctg x (na „T"),

tak vytkneme „2", tj.

$$\int \frac{1}{(t-1)^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

skoro „tabulka" s $at+b$, kde $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$